



مقدمه‌ای بر جبر خطی

محسن هوشمند

دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

جبر خطی

روشی معمول جهت نمایش امری مشهود

- ایجاد مجموعه‌ای از اشیاء (علائم)
- ایجاد مجموعه‌ای از قوانین جهت کار با اشیاء مذکور

← جبر

▪ جبر خطی

▪ مطالعه بردار و قوانین کار با آن

بردار

تعریف ریاضی بردار

- جمع با یکدیگر، منجر به تولید شی‌ای هم‌نوع خود
- ضرب در عدد، ایضا

مثال

- بردار هندسی، چندجمله‌ای‌ها، سیگنال صوتی، عضوی از \mathbb{R}^n

بستار (بسته بودن)

- از مفاهیم بنیادی ریاضیات
- جهت تقریب ذهن سعی بر پاسخ به «مجموعه‌ی تمامی موارد حاصل از عملیات تعریف‌شده چیست؟»
- با داشتن مجموعه‌ی کوچکی از بردارها و جمع و مقیاس‌بندی آنها
- مجموعه بردارهای حاصل چه خواهد بود \Leftarrow فضای بردار
- از پایه‌های بهینه‌سازی و یادگیری ماشین و جز این‌ها

بردارها

مقادیر حقیقی

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ترانهاده

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \equiv \forall i, i = 1, 2, \dots, n: x_i \geq 0$$

ضرب داخلی بردارها

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

ضرب داخلی

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq 0$$

- دارای ویژگی‌های جابجاپذیری، شرکت‌پذیری ضرب تک عدد (اسکالر)، توزیع‌پذیری جمع برداری
- دارای خواصی چون $\mathbf{e}_i^T \mathbf{x} = x_i$ ، $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = x_1 + \dots + x_n$
- میانگین، جمع مربعات، جمع انتخابی؟

ضرب خارجی

$$\mathbf{y}\mathbf{x}^T = \mathbf{C}, \quad c_{ij} = y_i x_j$$

دستگاه معادلات خطی

بخش اصلی جبر خطی

مدل سازی بسیاری از مسائل با معادلات خطی

▪ جبر خطی \Leftarrow تحویل ابزار حل مسائل مذکور

دستگاه معادلات خطی - مثال

کارگاهی

- تولید n محصول N_1 تا N_n
- جهت تولید محصولات نیاز به m ماده اولیه R_1 تا R_m
- نیاز به تخصیص a_{ij} واحد از هر ماده R_i جهت تولید هر واحد از N_j
 - $i = 1, \dots, m$
 - $j = 1, \dots, n$
- از هر محصول b_i واحد موجود
- هدف: یافتن طرح بهینه تولید

حل:

- x_1 تا x_n واحد از هر محصول
- میزان نیاز کلی به هر ماده اولیه R_i

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

دستگاه معادلات خطی - مثال - ادامه

تدوین:

▪ x_1 تا x_n واحد از هر محصول

▪ میزان نیاز کلی از ماده R_i

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

▪ هر تولید بهینه از ماده R_i باید برآورده گر دستگاه معادلات زیر باشد:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

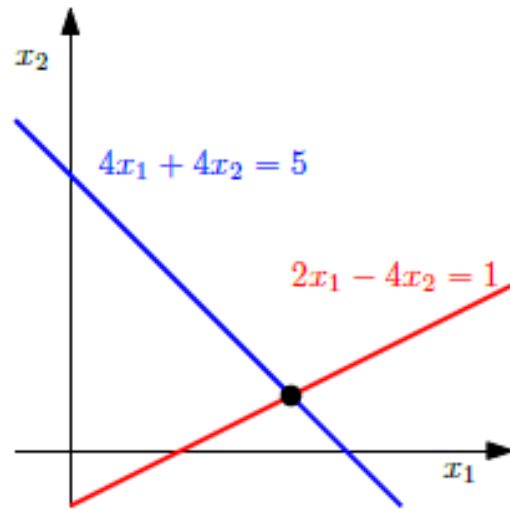
$$a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$$

▪ صورت عمومی دستگاه معادلات خطی

▪ x_1 تا x_n مجهول‌ها

▪ راه‌حل: هر $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ که پاسخ دستگاه باشد.

دستگاه معادلات خطی - مثال - ادامه



تعداد راه حل ها

- هیچ
- دقیقا یکی
- بی نهایت
- چرا؟
- راه حل: هر $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ که پاسخ دستگاه باشد.

حل دستگاه معادلات خطی

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نمایش برداری ضرائب

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

تجميع در ماتريس

ماتريس

- نمایش موجز دستگاه معادلات خطی
- نمایش توابع خطی (نگاشت‌های خطی)
- $m \times n$ -تایی اعضای a_{ij}
 - $i = 1, \dots, m$
 - $j = 1, \dots, n$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 & - 0.1x_2 & - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\10.0120x_3 &= 70.0843\end{aligned}$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\10.0120x_3 &= 70.0843\end{aligned}$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\10.0120x_3 &= 70.0843\end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

$$7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) = -19.5617$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\10.0120x_3 &= 70.0843\end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

$$7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) = -19.5617$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000$$

$$3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.0000) = 7.85$$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\10.0120x_3 &= 70.0843\end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

$$7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) = -19.5617$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000$$

$$3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.0000) = 7.85$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.0000)}{3} = 3.00000$$

مثال

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/1 \cdot R_1 \end{array}$$

مثال

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 = 71.4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/10 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 1.002 & 70.615 \end{bmatrix}$$

مثال

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 = 71.4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/10 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 1.002 & 70.615 \end{bmatrix} R_3 + \frac{0.19}{7.00333} R_2$$

مثال

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 = 71.4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/1 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 1.002 & 70.615 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_3 + \frac{0.19}{7.00333} R_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & 0 & 1.0012 & 70.0843 \end{bmatrix} \frac{1}{1.0012} R_3$$

مثال

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\0.3x_1 - 0.2x_2 + 1.0x_3 &= 71.4\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 1.0 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/1 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 1.002 & 70.615 \end{bmatrix} R_3 + \frac{0.19}{7.00333} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & 0 & 1.0012 & 70.0843 \end{bmatrix}$$

مثال

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 1/3 \cdot R_1 \\ R_3 - 1/10 \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.0333 & -0.29333 & -19.5617 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & 70.615 \end{bmatrix} R_3 + \frac{0.19}{7.0333} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.0333 & -0.29333 & -19.5617 \\ 0 & 0 & 10.012 & 70.0843 \end{bmatrix} \frac{1}{10.012} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.0333 & -0.29333 & -19.5617 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات خطی - تبدیلات ساده

روش عمومی

ماتریس‌ها نمایش موجز دستگاه معادلات خطی

حل معادلات خطی بسته به تبدیلات ابتدایی

عدم تغییر در پاسخ ولی تبدیل دستگاه معادلات به حالت ساده‌تر

- تغییر جای دو معادله (ردیف‌ها در نمایش ماتریسی)
- ضرب معادله‌ای (ردیفی) با مقدار ثابتی به جز صفر
- جمع دو معادله (ردیف)

تبدیلات ساده - ادامه

محور

- مقدار عددی شروع هر ردیف
- اولین عدد غیرصفر از چپ
- همیشه در سمت راست نسبت به ردیف بالاتر

صورت ردیف-پلکانی

- تمامی ردیف‌های کف ماتریس صرفاً دارای درایه‌های صفر
- با توجه به ردیف‌های غیرصفر، اولین عدد غیرصفر از سمت چپ (محورها)
- همیشه در سمت راست محور ردیف بالاتر

متغیرهای پایه و آزاد

- پایه: محورها
- آزاد: بقیه متغیرها

صورت ردیف پلکانی گاهیده

دارای صورت ردیف پلکانی

تمامی محورها برابر ۱

محورها تنها درایه‌های غیرصفر در هر ستون

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\2x - 3y + 2z &= 1 \\4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\2x - 3y + 2z &= 1 \\4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -4 & 8 \\2 & -3 & 2 & 1 \\4 & -8 & 12 & 1\end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned}y - 4z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 4x - 8y + 12z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

سازگار نیست و پاسخی ندارد.

حذف گاوس

الگوریتم به کارگیری تبدیلات ساده

تبدیل دستگاه معادلات خطی به صورت ردیف پلکانی کاهیده

شامل دو مرحله

- حذف جلورو
- جاگذاری رو به عقب

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 5z = 1$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 5z &= 1 \\ y + z &= 4 \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 5z = 1$$

$$y + z = 4$$

$$0 = 0$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 5z &= 1 \\ y + z &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 5z + 1 \\ y = -z + 4 \end{cases}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 5z = 1$$

$$y + z = 4$$

$$0 = 0$$

$$\begin{cases} x = 5z + 1 \\ y = -z + 4 \\ z \text{ متغیر آزاد} \end{cases}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_3 - 4x_4 = 5$$

$$x_5 = 7$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -\Delta & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -\Delta & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -\Delta & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 4x_4 &= \Delta \\ x_5 &= \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ آزاد} \\ x_3 = \Delta + 4x_4 \\ x_4 \text{ آزاد} \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 4x_4 &= 5 \\ x_5 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ آزاد} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ آزاد} \\ x_5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6a - 3b \\ x_2 = a \\ x_3 = 5 + 4b \\ x_4 = b \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{bmatrix}$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با} \\ \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } -3 \\ R_1 \text{ تغییر با } 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{bmatrix}$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

مثال -

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با} \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right]$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right]$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times (-1/3) \end{array}$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times (-1/3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right]$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با } \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times (-1/3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 3x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

مثال -

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -3$$

$$4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 = a$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 \text{ تغییر با} \\ R_1 \text{ تغییر با} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & a \end{array} \right] R_4 - R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times (-1/3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 3x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

یافتن پاسخ

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

متغیر آزاد x_2

$$x_3 = x_4 - 2x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

متغیر آزاد x_5

یافتن پاسخ

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

متغیر آزاد x_2

$$x_3 = x_4 - 2x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

متغیر آزاد x_5

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

متغیر آزاد x_2

$$x_3 = -x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

متغیر آزاد x_5

یافتن پاسخ

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = x_4 - 2x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 + 2x_5 + 2$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

یافتن پاسخ

یافتن پاسخ

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = x_4 - 2x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 1$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 + 2x_5 + 2$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 1$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_4 - 2x_5 = 1$$

$$0 = a + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = x_4 - 2x_5 - 2$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 1$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

$$x_1 = 2x_2 + 2x_5 + 2$$

x_2 متغیر آزاد

$$x_3 = -x_5 - 1$$

$$x_4 = 2x_5 + 1$$

x_5 متغیر آزاد

یافتن پاسخ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس ها

مقادیر حقیقی

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

جمع ماتریس‌ها

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & \dots & x_{1n} + y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + y_{m1} & \dots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ضرب ماتریس‌ها

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$Z = XY \in \mathbb{R}^{m \times k}$$
$$z_{ij} = \sum_{l=1}^n x_{il} y_{lj}$$

لزوم برابری بعدهای همسایه

ضرب جزءبه‌جزء یا ضرب هدامرد

ضرب کرانکر

ضرب خاتری-تائو

ضرب ماتریس‌ها - ویژگی

$$XY \neq YX$$

قطر ماتریس $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$
شامل اعضای X_{ii} $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$

ماتریس قطری $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$
شامل اعضای $X_{ij} = 0, i \neq j$

ماتریس همانی
 $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times p}, Z \in \mathbb{R}^{p \times q}: (XY)Z = X(YZ)$$
$$X, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}, Z, W \in \mathbb{R}^{n \times p}: \begin{cases} (X + Y)Z = XZ + YZ \\ X(Z + W) = XZ + XW \end{cases}$$
$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}: I_m X = X I_n = X$$

معکوس ماتریس

- $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $YX = XY = I$ و $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Y معکوس X و نمایش با X^{-1}
- همه ماتریس‌ها معکوس پذیر نیستند
- معکوس پذیر / غیر تکین
- معکوس ناپذیر / تکین

مثال

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix} \text{ معکوس } X \text{ برابر با}$$

- اگر و فقط اگر $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0$

معکوس ماتریس با روش حذف گاوس

$$[X|I_n] \rightarrow \dots \rightarrow [I_n|X^{-1}]$$

ترانهاده ماتریس

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$y_{ij} = x_{ji} \text{ و } Y \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ .}$$

Y ترانهاده X و نمایش با X^T .

▪ جابجائی سطرها با ستونها

ویژگی‌های اعمال معکوس و ترانهاده

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I \text{ .}$$

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1} \text{ .}$$

$$(X + Y)^{-1} \neq X^{-1} + Y^{-1} \text{ .}$$

$$(X^T)^T = X \text{ .}$$

$$(X + Y)^T = X^T + Y^T \text{ .}$$

$$(XY)^T = Y^T X^T \text{ .}$$

ماتریس متقارن

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$X = X^T \quad \blacksquare$$

$$(X^{-1})^T = (X^T)^{-1} = X^{-T} \quad \blacksquare$$

▪ معکوس X^T برابر با ترانهادۀ X^{-1}

▪ جمع ماتریس متقارن؟

▪ ضرب دو ماتریس متقارن؟

ضرب عدد در ماتریس

$$\lambda, \psi \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}, X \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$k_{ij} = \lambda x_{ij}, \lambda X = K \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}(\lambda\psi)X &= \lambda(\psi X) \\ \lambda(XY) &= (\lambda X)Y = X(\lambda Y) = (XY)\lambda \\ (\lambda X)^T &= X^T \lambda^T = X^T \lambda = \lambda X^T \\ (\lambda + \psi)X &= \lambda X + \psi X \\ \lambda(X + Y) &= \lambda X + \lambda Y\end{aligned}$$

ماتریس ها

ماتریس پائین مثلثی $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$

▪ شامل اعضای X_{ij} $i > j$

▪ تمامی اعضای بالا قطر صفر

ماتریس بالامثلثی $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$

▪ شامل اعضای X_{ij} $i < j$

▪ تمامی اعضای پائین قطر صفر

ماتریس متعامد Q

$$QQ^T = Q^T Q = I \quad \cdot$$

رد (اثر) ماتریس

$$\text{tr}[X] = \sum_{i=1}^n x_{ii}$$

گروه‌ها

گروه‌ها

داری نقش مهم در علم رایانه

رمزنگاری، نظریه اطلاعات، و گرافیک

تعریف مجموعه \mathcal{G} و عمل $\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن گاه $G := (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه است اگر:

۱- بسته بودن $\forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y \in \mathcal{G}$

۲- شرکت پذیری $\forall x, y, z \in \mathcal{G}: (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

۳- عضو خنثی $\exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G}: x \otimes e = e \otimes x = x$

۴- عضو معکوس $\forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x = e$

گروه آبدلی

تعریف مجموعه \mathcal{G} و عمل $\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن گاه $G := (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه آبدلی است اگر:

$$1- \text{ بسته بودن } \forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y \in \mathcal{G}$$

$$2- \text{ شرکت پذیری } \forall x, y, z \in \mathcal{G}: (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

$$3- \text{ عضو خنثی } \exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G}: x \otimes e = e \otimes x = x$$

$$4- \text{ عضو معکوس } \forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x = e$$

$$5- \text{ جابجا پذیری } \forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x$$

فضای برداری

تعریف

فضای بردار مقدار حقیقی $(V, +, \cdot)$ مجموعه‌ای است با دو عملیات:

$$+: V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

به طوری که

۱- $(V, +)$ آبدلی است

۲- توزیع پذیری

الف- $\forall \lambda \in \mathbb{R}; x, y \in V: \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$

ب- $\forall \lambda, \psi \in \mathbb{R}; x \in V: (\lambda + \psi).x = \lambda.x + \psi.x$

۳- شرکت پذیری $\forall \lambda, \psi \in \mathbb{R}; x \in V: \lambda.(\psi.x) = (\lambda\psi).x$

۴- عضو خنثی $\forall x \in V: 1.x = x$

زیرفضای برداری

تعریف

زیر فضای بردار مقدار حقیقی $(V, +, \cdot)$ مجموعه‌ای است دارای خواص زیر:

$$\mathbf{0} \in S$$

$$+: V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

زیرفضا

$$A: m \times n$$

$$Ax = \mathbf{0}$$

معادله همگن

$$N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

▪ زیرفضا؟

- $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} \in N$
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in N \Rightarrow \begin{cases} A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\ A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in N$
- $\mathbf{v}_1 \in N \Rightarrow A(c\mathbf{v}_1) = cA(\mathbf{v}_1) = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow c\mathbf{v}_1 \in N$

▪ N فضای پوچ A

استقلال خطی

ترکیب خطی

▪ فضای برداری V و تعدادی متناهی بردارهای $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$ را فرض می‌کنیم. آن‌گاه، به ازای $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \in V$$

به طوری که $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ، ترکیبی خطی از بردارهای $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ است.

وابستگی و استقلال خطی:

▪ $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$

▪ وابستگی خطی - اگر ترکیب موجود باشد که $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ ، به طوری که حداقل یکی از $\lambda_i \neq 0$

▪ استقلال خطی - در صورتی که $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ ، ترکیبی نامهم باشد.

▪ به سخن دیگر، تمامی ضرائب برابر صفر

استقلال خطی - ادامه

روش بررسی وابستگی خطها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابه ستونهای ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
- ستونهای محور نشانگر بردارهای مستقل
- ستونهای غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستونهای محور

استقلال خطی - ادامه

روش بررسی وابستگی خطها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابه ستونهای ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
- ستونهای محور نشانگر بردارهای مستقل
- ستونهای غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستونهای محور

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

روش بررسی وابستگی خطها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابه ستونهای ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
- ستونهای محور نشانگر بردارهای مستقل
- ستونهای غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستونهای محور

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

استقلال خطی - ادامه

روش بررسی وابستگی خطها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابه ستونهای ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
- ستونهای محور نشانگر بردارهای مستقل
- ستونهای غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستونهای محور

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

پایه‌های فضا

▪ بردارهای مستقلی که فضا را پوشش می‌دهند.

پایه‌های بندادی (کانونی) فضای \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

▪ دیگر پایه‌ها

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.2 \\ -1.3 \\ 3.5 \end{bmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

بعد فضا

▪ تعداد بردارهای پایه فضا

پایه و رتبه

رتبه

Rank ▪

نمایش با ρ ▪

برابر است با تعداد ستون‌های مستقل ماتریس ▪

که خود برابر است با تعداد ردیف‌های مستقل آن ▪

ویژگی‌ها

$\rho(A) = \rho(A^T)$ ▪

بعد زیرفضای پوشش داده شده با ماتریس برابر با رتبه ماتریس ▪

یافتن پایه‌ها با اعمال حذف گاوس ▪

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ معکوس‌پذیر است اگر فقط اگر $\rho(X) = n$ ▪

$Ax = b$ حل‌پذیر اگر و فقط اگر $\rho(A) = \rho(A|b)$ ▪

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، آن‌گاه $Ax = 0$ دارای بعد $n - \rho(A)$ ▪

معروف به فضای پوچ ▪

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ رتبه‌تمام اگر رتبه برابر با بزرگترین رتبه ممکن باشد: $\rho(X) = \min(m, n)$ ▪

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ رتبه‌تمام اگر دترمینان برابر مقدار غیرصفر ▪

xy^T : رتبه-یک ▪

پایه و رتبه - ادامه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چهار زیرفضای بنیادی

ماتریس $A_{m \times n}$

شامل فضای ستون و فضای پوچ A و A^T

جهت فهم در سطح بالاتر $Ax = b$

قدم اول Ax ترکیبی از ستون‌های A

▪ بردارهای پرکننده فضای ستون A ، $C(A)$

▪ $Ax = b$ دارای پاسخ در صورتی که b در فضای ستون A

ارتباط چهار زیرفضا در قالب «قضیه اساسی جبر خطی»

▪ استرنگ

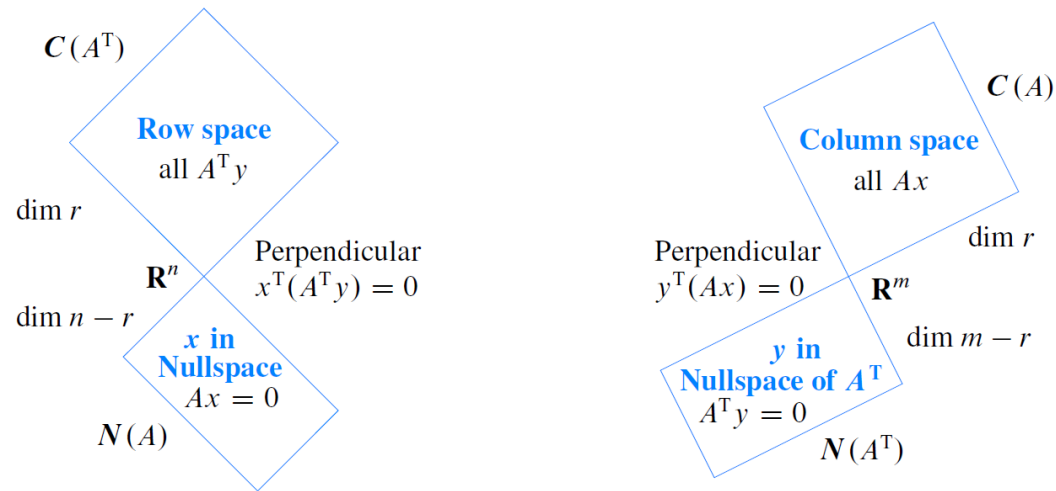


Figure 1: Dimensions and orthogonality for any m by n matrix A of rank r .

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

محاسبه فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه فضای پوچ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

فضای پوچ و فضای ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

فضای پوچ و فضای ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

شرط استقلال خطی $N(A) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$

▪ ستون‌های فضای ستون، پایه‌ها نیستند

فضای پوچ و فضای ستون

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x_4 = -1 \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = -1 \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$$

پس امکان تغییر پوشش فضای ستون

$$c(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

مثال - چہار فضا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال - چهار فضا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{فضای ردیف } C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{فضای ستون } C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{فضای پوچ } N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{فضای ترانهاده پوچ } N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

چهار فضای $A_{m \times n}$

فضای ردیف عمود بر فضای پوچ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{ردیف ۱} \\ \dots \\ \text{ردیف } m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

▪ \mathbf{x} عمود بر ردیف ۱

▪ ...

▪ \mathbf{x} عمود بر ردیف m

فضای ستون عمود بر فضای ترانهاده پوچ

▪ هر بردار $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ عمود بر هر راه حل $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$

$$(A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) = 0$$

فضای ستون $C(A)$ و فضای ردیف $C(A^T)$ دارای بعد برابر با رتبه r

فضای پوچ $N(A)$ دارای بعد $n - r$

فضای ترانهاده پوچ $N(A^T)$ دارای بعد $m - r$

نرم

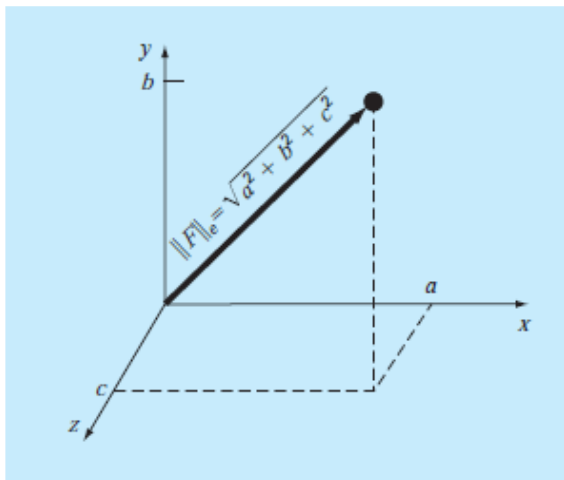
نگاشتی است از فضای n بعدی به عددی نامنفی

اندازه‌گیری طول بردار $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$$



تناظر آن‌ها با تعاریف محدوده

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \bullet$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \bullet$$

نرم - ادامه

ویژگی‌ها

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{z}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$$

تساوی اگر و فقط اگر بردارهای \mathbf{x} و \mathbf{z} ضریبی از یکدیگر باشند

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

نُرم - ادامه

نامساوی کوشی-شوارتز

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{z}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\|,$$

تساوی اگر و فقط اگر بردارهای \mathbf{x} و \mathbf{z} ضریبی از یکدیگر باشند

نرم ماتریس‌ها

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$\|A\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

نرم ماتریس‌ها

نرم فروبنیوس

$$\|A\|_F \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نرم ماتریس‌ها - ویژگی‌ها

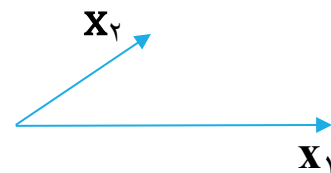
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

عدد وضعیت (شرط)

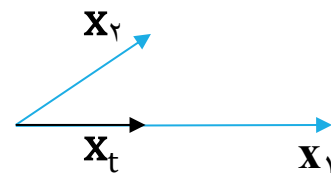
$$\kappa(Q) = \|Q\|\|Q^{-1}\|$$

- $\kappa(Q) = \|Q\|\|Q^{-1}\|$
- $\kappa(Q)$ کوچک: «خوش وضعیتی»
- $\kappa(Q)$ بزرگ: بدوضعیتی!
- گاهی اوقات امکان تعریف $\kappa(Q)$ با مقادیر ویژه
- چه مواقعی؟

تصویر (پراجکشن)

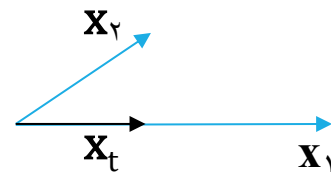


تصویر (پراجکشن)



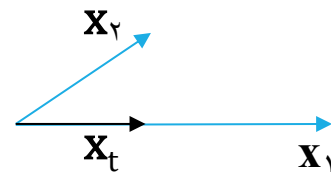
تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|}$$



تصویر (پراجکشن)

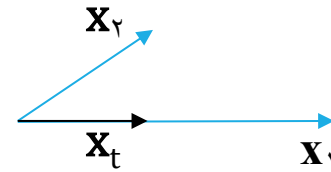
$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_r\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_r\| \cos\theta *$$



تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

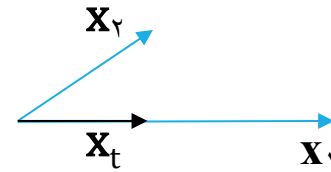
$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$



تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$

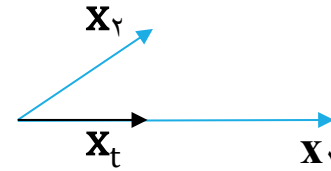


$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ ضرب } *$$

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$

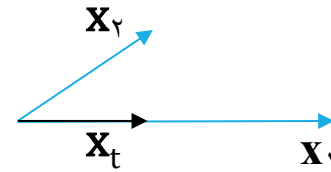


$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ در } * \text{ ضرب} \Rightarrow \|x_t\| = \frac{\|x_1\| \|x_2\| \cos\theta}{\|x_1\|}$$

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$



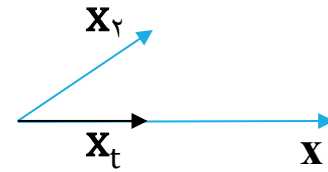
$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ در ضرب } * \Rightarrow \|x_t\| = \frac{\|x_1\| \|x_2\| \cos\theta}{\|x_1\|}$$

$$\Rightarrow \|x_t\| = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|} **$$

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$



$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ در ضرب } * \Rightarrow \|x_t\| = \frac{\|x_1\| \|x_2\| \cos\theta}{\|x_1\|}$$

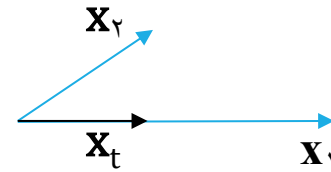
$$\Rightarrow \|x_t\| = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|} **$$

$$x_t = \|x_t\| \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$



$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ در ضرب } * \Rightarrow \|x_t\| = \frac{\|x_1\| \|x_2\| \cos\theta}{\|x_1\|}$$

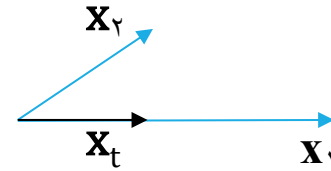
$$\Rightarrow \|x_t\| = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|}$$

$$x_t = \|x_t\| \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|} \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_2\|} \Rightarrow \|x_t\| = \|x_2\| \cos\theta *$$

$$x_1 \cdot x_2 = \|x_1\| \|x_2\| \cos\theta **$$



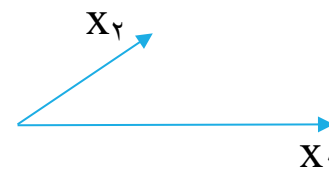
$$\Rightarrow \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} \text{ ضرب } * \Rightarrow \|x_t\| = \frac{\|x_1\| \|x_2\| \cos\theta}{\|x_1\|}$$

$$\Rightarrow \|x_t\| = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|}$$

$$x_t = \|x_t\| \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|} \frac{x_1}{\|x_1\|} \Rightarrow x_t = \left(\frac{x_1 \cdot x_2}{\|x_1\|^2} \right) x_1$$

روش گرام اشمیت

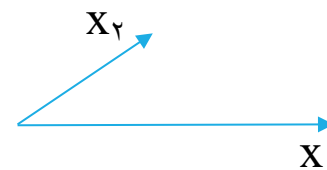
X پایه‌ای برای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
▪ به دنبال پایه یکه متعامد



روش گرام اشمیت

X پایه‌ای برای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یکه متعامد

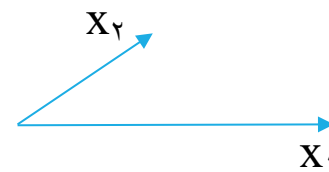
- $X_1 = \text{span}(x_1)$



روش گرام اشمیت

X پایه‌ای برای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یکه متعامد

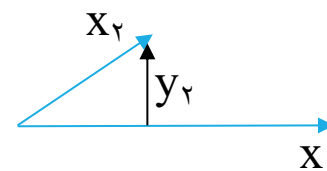
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

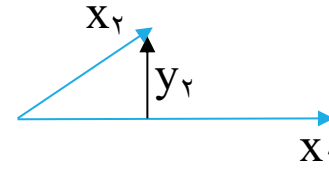
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

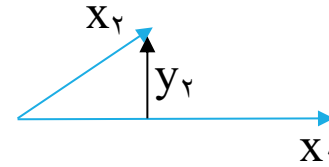
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

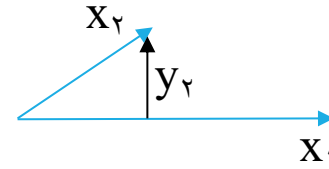
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

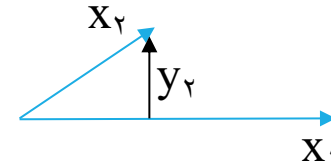
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$



روش گرام اشمیت

X برای پایه‌ای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یکه متعامد

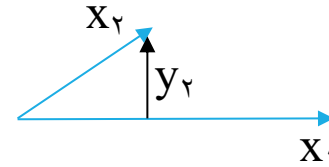
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$



روش گرام اشمیت

X برای پایه‌ای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یکه متعامد

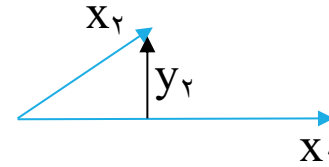
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

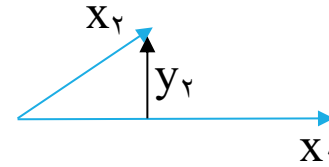
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه‌های $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ متعامد

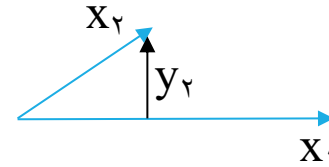
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \Rightarrow X_3 = \text{span}(y_1, y_2, y_3)$



روش گرام اشمیت

X به دنباله پایه یک متعامد $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ برای X

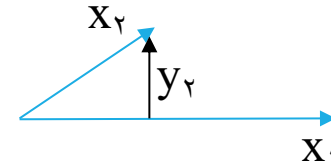
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \Rightarrow X_3 = \text{span}(y_1, y_2, y_3)$
- \vdots
- $X_k = \text{span}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \text{span}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_k)$



روش گرام اشمیت

X پایه‌ای برای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یک متعامد

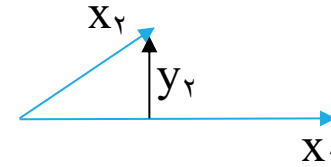
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \Rightarrow X_3 = \text{span}(y_1, y_2, y_3)$
- \vdots
- $X_k = \text{span}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \text{span}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_k)$
- $\Rightarrow y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k \cdot y_i)y_i}{\|y_i\|^2}$



روش گرام اشمیت

X پایه‌ای برای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$
به دنبال پایه یک متعامد

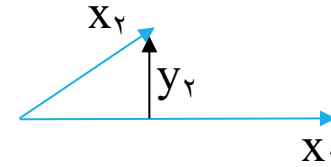
- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \Rightarrow X_3 = \text{span}(y_1, y_2, y_3)$
- \vdots
- $X_k = \text{span}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \text{span}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_k)$
- $\Rightarrow y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k \cdot y_i)y_i}{\|y_i\|^2}, y_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$



روش گرام اشمیت

X به دنبال پایه‌ای متعامد $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ پایه‌ای برای X

- $X_1 = \text{span}(x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $X_2 = \text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(y_1, x_2)$
- $\Rightarrow y'_2 = x_2 - \frac{(x_2 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2}, y_2 = \frac{y'_2}{\|y'_2\|} \Rightarrow X_2 = \text{span}(y_1, y_2)$
- $X_3 = \text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(y_1, y_2, x_3)$
- $\Rightarrow y'_3 = x_3 - \frac{(x_3 \cdot y_1)y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{(x_3 \cdot y_2)y_2}{\|y_2\|^2}, y_3 = \frac{y'_3}{\|y'_3\|} \Rightarrow X_3 = \text{span}(y_1, y_2, y_3)$
- \vdots
- $X_k = \text{span}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \text{span}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_k)$
- $\Rightarrow y'_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k \cdot y_i)y_i}{\|y_i\|^2}, y_k = \frac{y'_k}{\|y'_k\|} \Rightarrow X_k = \text{span}(y_1, y_2, \dots, y_k)$



تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & & U_{12} & & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & & & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & & & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & & U_{12} & & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & & L_{21}U_{13} + U_{23} & \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_{11} = 1},$$

$$\boxed{U_{12} = 2},$$

$$\boxed{U_{13} = 4}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$\begin{bmatrix} U_{11} & & U_{12} & & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_{11} = 1}, \quad \boxed{U_{12} = 2}, \quad \boxed{U_{13} = 4}$$

$$L_{21}U_{11} = 3 \quad \therefore L_{21} \times 1 = 3 \quad \therefore \boxed{L_{21} = 3},$$

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \quad \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \quad \therefore \boxed{U_{22} = 2},$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \quad \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \quad \therefore \boxed{U_{23} = 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$\begin{bmatrix} U_{11} & & U_{12} & & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & & L_{21}U_{13} + U_{23} & \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_{11} = 1}, \quad \boxed{U_{12} = 2}, \quad \boxed{U_{13} = 4}$$

$$L_{21}U_{11} = 3 \quad \therefore L_{21} \times 1 = 3 \quad \therefore \boxed{L_{21} = 3},$$

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \quad \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \quad \therefore \boxed{U_{22} = 2},$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \quad \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \quad \therefore \boxed{U_{23} = 2}$$

$$L_{31}U_{11} = 2 \quad \therefore L_{31} \times 1 = 2 \quad \therefore \boxed{L_{31} = 2},$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \quad \therefore 2 \times 2 + L_{32} \times 2 = 6 \quad \therefore \boxed{L_{32} = 1},$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 13 \quad \therefore (2 \times 4) + (1 \times 2) + U_{33} = 13 \quad \therefore \boxed{U_{33} = 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$\begin{bmatrix} U_{11} & & U_{12} & & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & & L_{21}U_{13} + U_{23} & \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_{11} = 1}, \quad \boxed{U_{12} = 2}, \quad \boxed{U_{13} = 4}$$

$$L_{21}U_{11} = 3 \quad \therefore L_{21} \times 1 = 3 \quad \therefore \boxed{L_{21} = 3},$$

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \quad \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \quad \therefore \boxed{U_{22} = 2},$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \quad \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \quad \therefore \boxed{U_{23} = 2}$$

$$L_{31}U_{11} = 2 \quad \therefore L_{31} \times 1 = 2 \quad \therefore \boxed{L_{31} = 2},$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \quad \therefore 2 \times 2 + L_{32} \times 2 = 6 \quad \therefore \boxed{L_{32} = 1},$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 13 \quad \therefore (2 \times 4) + (1 \times 2) + U_{33} = 13 \quad \therefore \boxed{U_{33} = 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

تجزیہ بالا-پائین ماتریس

تجزیة بالا-پائین ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

بررسی وجود تجزیه بالا-پائین ماتریس

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

تمامی زیرماتریس‌ها معکوس پذیر
دترمینان غیرصفر

$$|A_1| = 1,$$

$$|A_2| = (1 \times 8) - (2 \times 3) = 2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 20 - (2 \times 11) + (4 \times 2) = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q'_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{q'_2}{3} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q'_3 = a_3 - (a_3 \cdot q_1)q_1 - (a_3 \cdot q_2)q_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{q'_3}{5} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه QR

Q بردار متعامد یکه

R ماتریس بالا مثلثی

استفاده از گرم-اشمیت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = QR \quad R = Q^T A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1q_1$$

$$a_2 = 2q_1 + 3q_2$$

$$a_3 = 4q_1 + 6q_2 + 5q_3$$

تجزیه QR

Q بردار متعامد یکه

R ماتریس بالا مثلثی

استفاده از گرم-اشمیت

تجزیه کولسکی

$$X = \begin{cases} \text{تجزیه پائین مثلثی} \\ \text{تجزیه بالامثلثی} \end{cases}$$

$$X = X^T, x_{ij} = x_{ji}$$
$$X = \begin{cases} \text{تجزیه پائین مثلثی} \\ \text{ترانهاده تجزیه پائین مثلثی} \end{cases}$$
$$X = LL^T$$

تجزیه کولسکی

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = LL^T$$

$$l_{ki} = \frac{x_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{kk} = \sqrt{x_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

تجزیه کولسکی

$$l_{ki} = \frac{x_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}l_{kj}}{l_{ii}}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$
$$l_{kk} = \sqrt{x_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

$$k = 1: \{i = 1: l_{11} = \sqrt{x_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495\}$$

$$k = 2: \left\{ \begin{array}{l} i = 1: l_{21} = \frac{x_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237 \end{array} \right.$$

$$k = 2: \left\{ \begin{array}{l} i = 2: l_{22} = \sqrt{x_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - 6.1237^2} = 4.1833 \end{array} \right.$$

$$k = 3: \left\{ \begin{array}{l} i = 1: l_{31} = \frac{x_{31}}{l_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.454 \end{array} \right.$$

$$k = 3: \left\{ \begin{array}{l} i = 2: l_{32} = \frac{x_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \frac{225 - 6.1237(22.454)}{4.1833} = 20.917 \end{array} \right.$$

$$k = 3: \left\{ \begin{array}{l} i = 3: l_{33} = \sqrt{x_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - 22.454^2 - 20.917^2} = 6.1101 \end{array} \right.$$

ماتریس‌ها

ماتریس مثبت معین

▪ ماتریس مربعی که

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

▪ روش‌های تشخیص مثبت معینی ماتریس

▪ دترمینان کهاد ماتریس

▪ محاسبه بردار ویژه‌های ماتریس

▪ فاکتورگیری کولسکی

ماتریس مثبت نیمه‌معین

$$x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} =$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

مثال

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 > 0\end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + 9x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 \\ &= (3x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- هم‌جهتی: دو بردار نشانگر یک جهت
- هم‌خطی: دو بردار موازی

$$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ فرض}$$

$$A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x})$$

پس تمامی بردارهای هم‌جهت \mathbf{x} بردار ویژه A

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$Ax = \lambda x$$

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \mathbf{0} \\ |M| = 0 \end{array} \right\} Mx = \mathbf{0}$$

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \mathbf{0} \\ |M| = 0 \end{array} \right\} Mx = \mathbf{0}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I|$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$
$$= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 - \lambda & 2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{array} \right| = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 10. \end{aligned}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{array} \right| = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \end{aligned}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 - \lambda & 2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{array} \right| = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &\Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = -2x_2$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = -2x_2 \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$
$$= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = \lambda^2 - \lambda - 12 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -3x_1 \\ 5x_1 - x_2 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = -2x_2 \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 5x_1 - x_2 = 4x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه، مقدار ویژه؟

مقدمات بردار/مقدار ویژه

- تبدیل خطی
- دترمینان
- دستگاه‌های خطی
- تغییر پایه

بردار ویژه، مقدار ویژه؟

$$Ax = b$$

- حل دستگاه معادلات جبری
- نگاشت خطی (تبدیل برداری به بردار دیگر با ترکیب خطی)
 - تبدیل
 - چرخش
 - مقیاس بندی
- مسائل استخراج پذیر
 - مقدار b
 - مقدار x
- $x = A^{-1}b$
 - تحلیل ماتریس تبدیل
 - نیاز به بردار ویژه و مقدار ویژه
 - بردار ویژه جهتی که ماتریس مانند مقیاس و ضریب عمل می کند.
 - مقدار ضریب برابر مقدار ویژه

بردار ویژه، مقدار ویژه؟ - ادامه

- بردار ویژه جهتی که ماتریس تبدیل جهت را تغییر نمی‌دهد
- با یافتن بردارهای ویژه در ماتریس چرخش
- یافتن محورهای چرخش

دترمینان ماتریس برابر است با مقداری که ناحیه‌ای را تغییر می‌دهد

- دترمینان برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه

به زبان نادقیق

- مقادیر ویژه برابر اعوجاج حاصل از تبدیل است
- بردارهای ویژه چگونگی چرخش اعوجاج را ابراز می‌کنند
- نقطه تلاقی پی‌سی‌ای

آخرین تفسیر

- منطق شکست

بردار ویژه، مقدار ویژه؟ - ادامه

کاربردها

- زنجیره مارکوف و پیاده‌روی تصادفی
- کاهش بعد

تجزیه ویژه و قطری سازی

مزایای قطری سازی

▪ راحتی محاسبه دترمینان و توان رسانی و معکوس گیری

دو ماتریس A و D مشابه اگر

$$D = P^{-1}AP \quad \square$$

قضیه تجزیه ویژه

ماتریس مربع $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را می توان به صورت $A = PDP^{-1}$ تجزیه کرد

▪ $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ که ستون های آن متناظر بردار ویژه های A

▪ D ماتریس قطری که درایه ها روی قطر برابر مقادیر ویژه A هستند

▪ مقدار D_{ii} متناظر بردار ویژه p_i

تجزیه ویژه و قطری سازی - ادامه

قضیه

ماتریس متقارن $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را همیشه می توان قطری نوشت.

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$
$$\Rightarrow P = [p_1, p_2]$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = [p_1, p_2] \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = [p_1, p_2] \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = [p_1, p_2] \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

$$P^{-1} = P^T$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = [p_1, p_2] \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

$$P^{-1} = P^T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^T}$$

تجزیه ویژه و قطری سازی - ویژگی ها

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

$$|A| = |PD P^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |D| = \prod_i D_{ii} = \prod_i \lambda_i$$

$$\rho(A) = \rho(D)$$

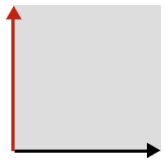
اعمال پذیر بر ماتریس های مربع

تجزیه مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی

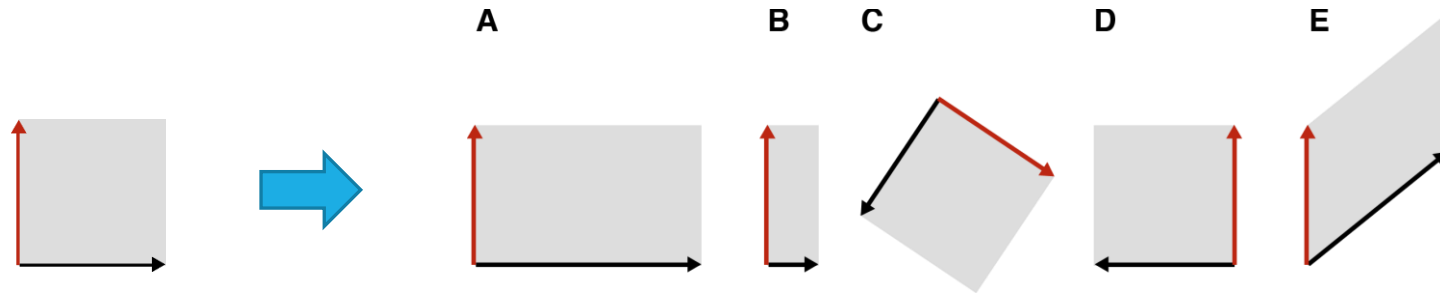
تجزیه مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی



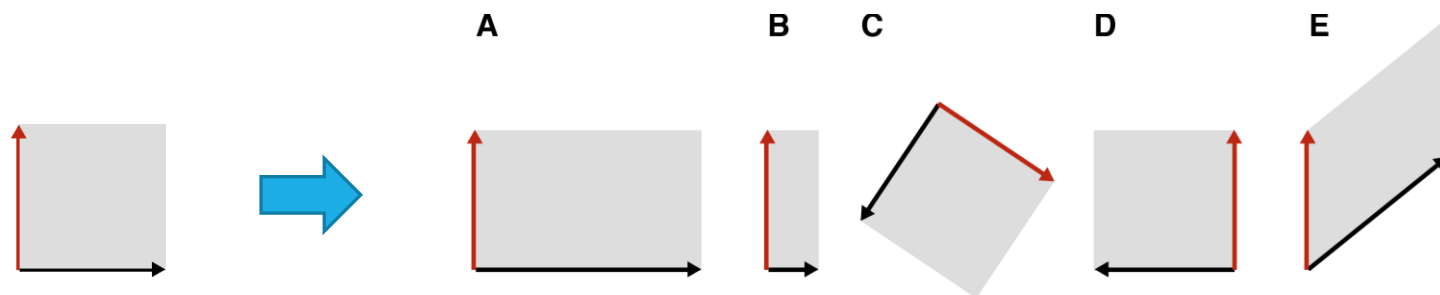
تجزیه مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی



تجزیه مقدار تکین

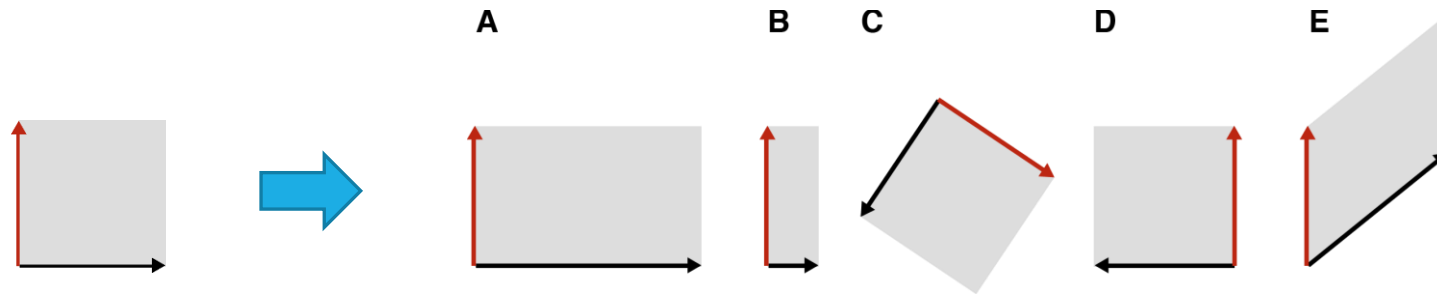
امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی



تنها محدودیت
خطی بودن

تجزیه مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی

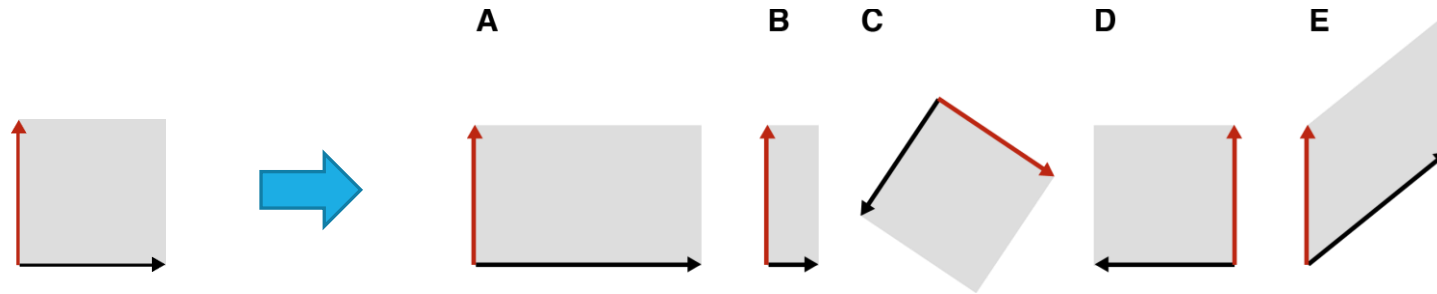


تنها محدودیت

- خطی بودن
- تقریب ذهن
- مستقیم باقی ماندن خط مستقیم پس از اعمال با عملیات خطی

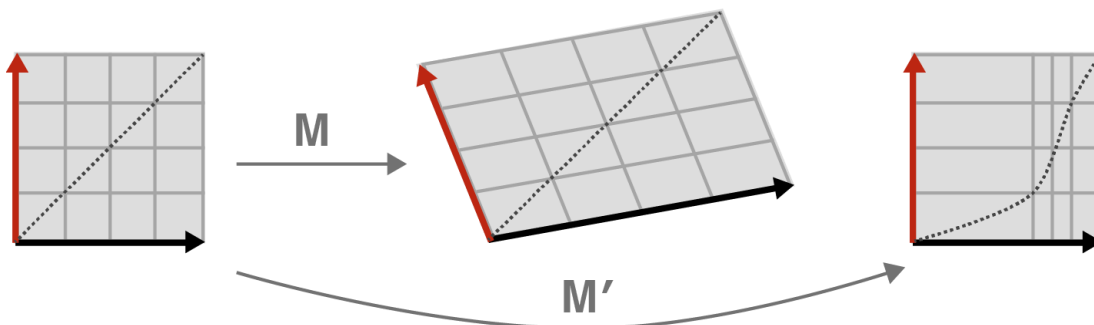
تجزیه مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی، فشردگی یا چرخش بر مربعی

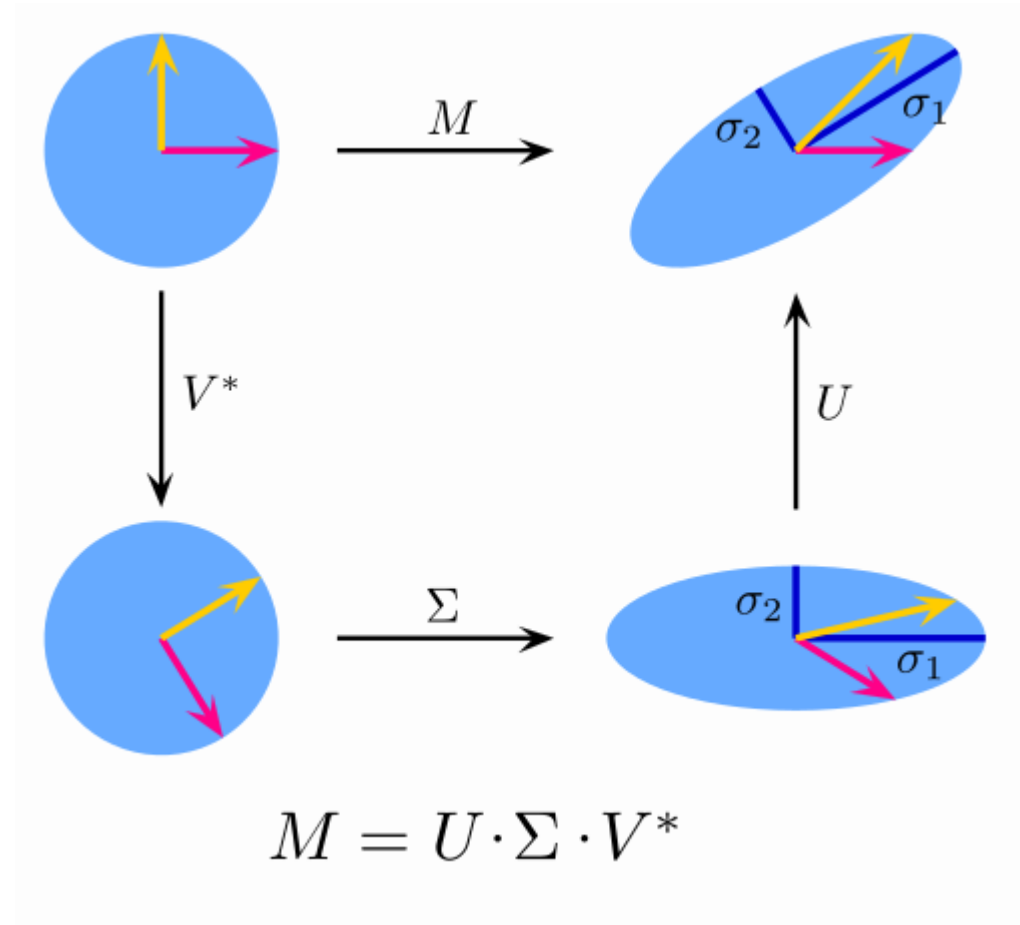


تنها محدودیت

- خطی بودن
- تقریب ذهن
- مستقیم باقی ماندن خط مستقیم پس از اعمال با عملیات خطی



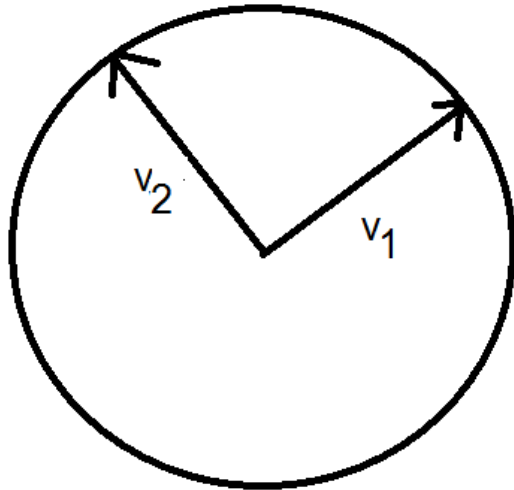
تجزیه مقدار تکین



M

تجزیه مقدار تکین

- فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2
- دوبعدی
 - ولی امکان تعمیم n بعدی



تجزیه مقدار تکین

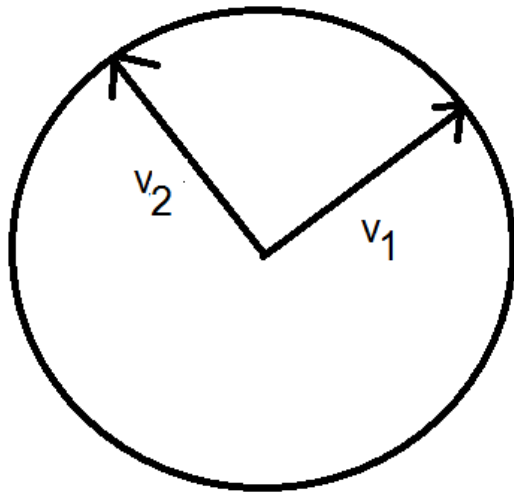
فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ دوی بعدی

▪ ولی امکان تعمیم n بعدی

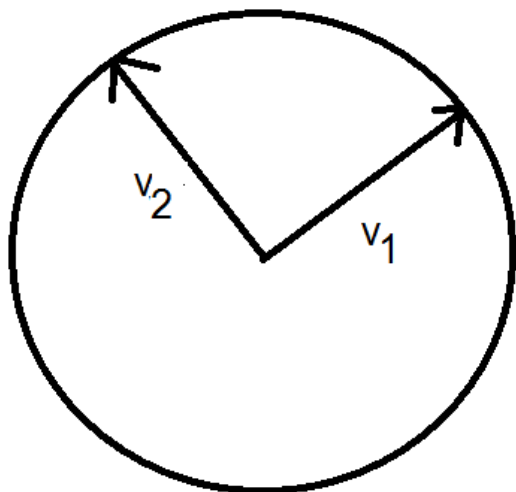
▪ فرض ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

▪ با اعمال A چه اتفاقی برای مختصات روبرو خواهد افتاد؟



تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2



▪ دوبعدی

▪ ولی امکان تعمیم n بعدی

▪ فرض ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

▪ با اعمال A چه اتفاقی برای مختصات روبرو خواهد افتاد؟

▪ چرخش

▪ کشش یا فشردن بردار

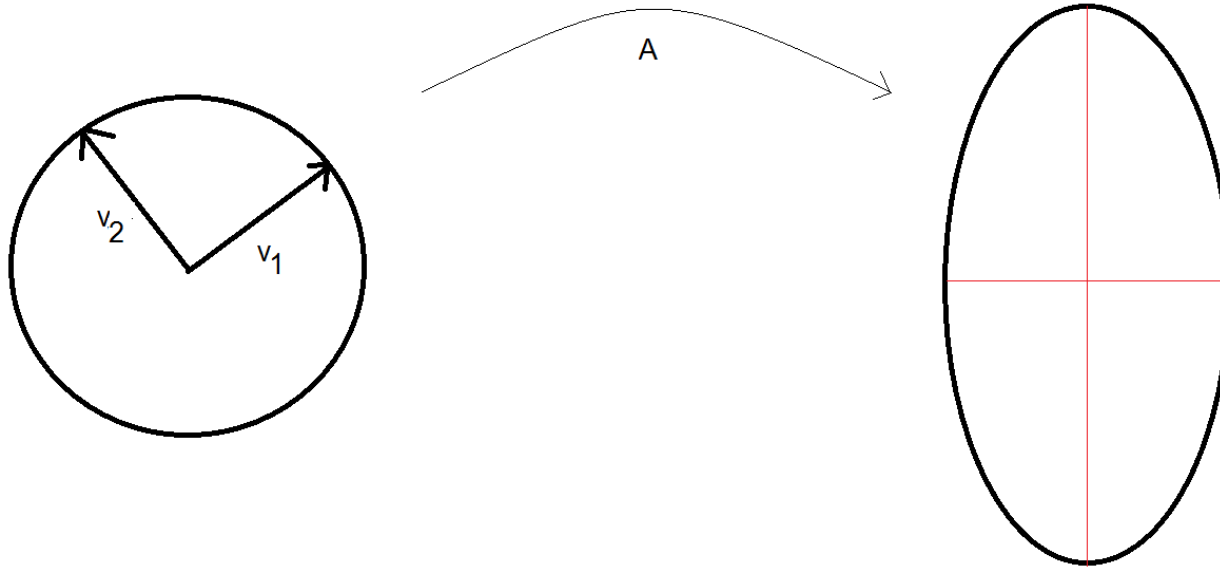
▪ یکسان برای همه بردارها

تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

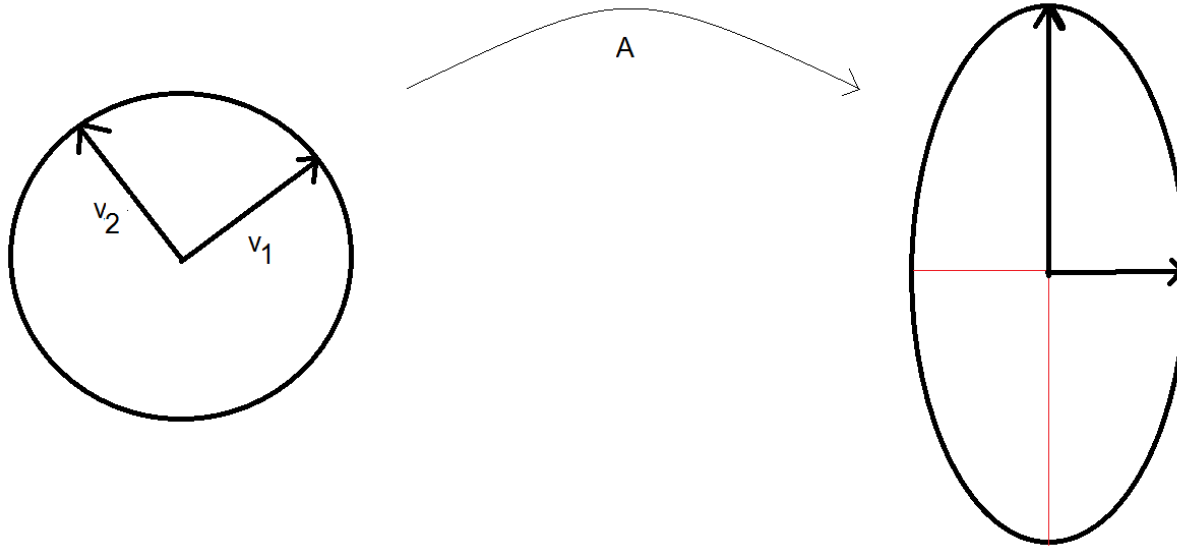


تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

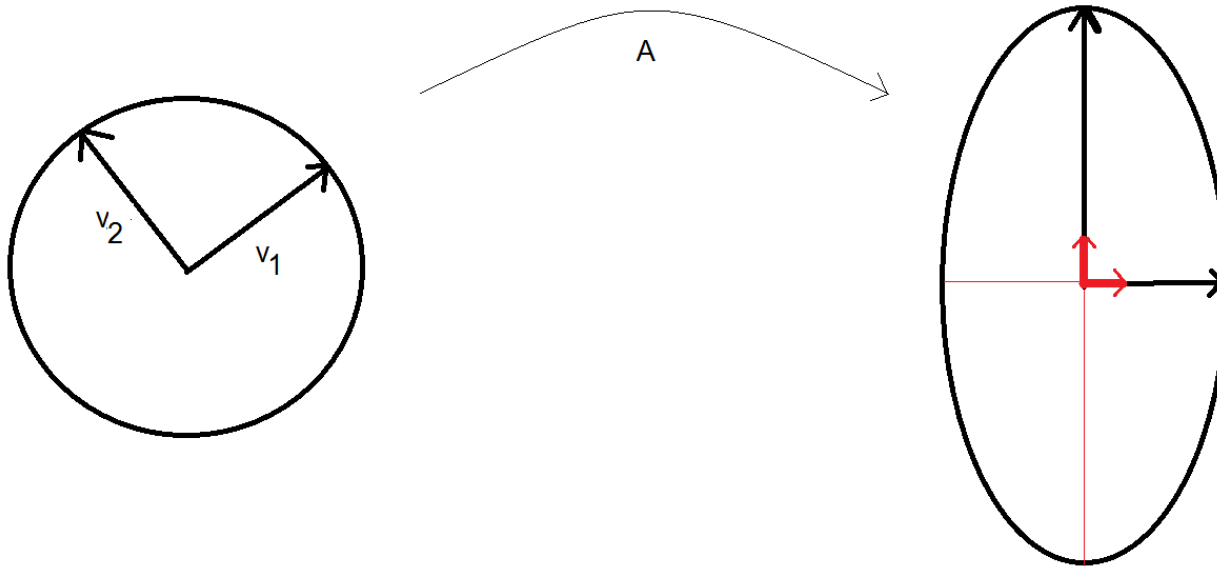


تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

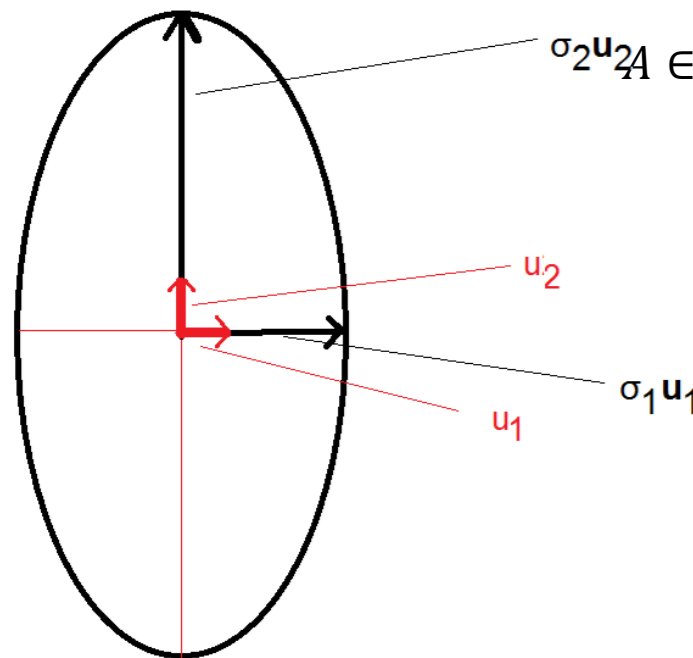
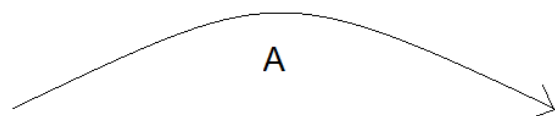
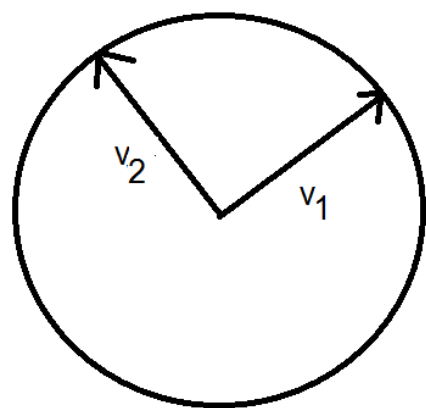


تجزیه مقدار تکین

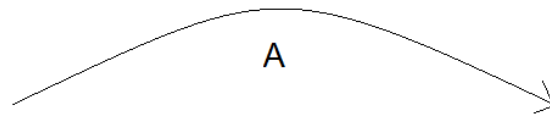
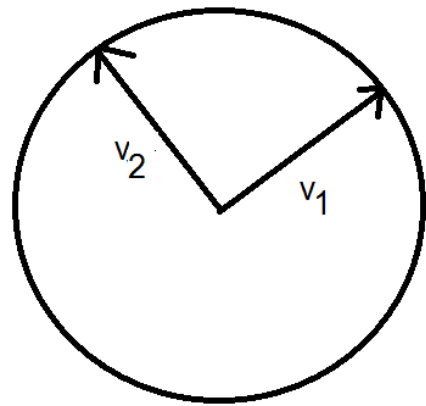
فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

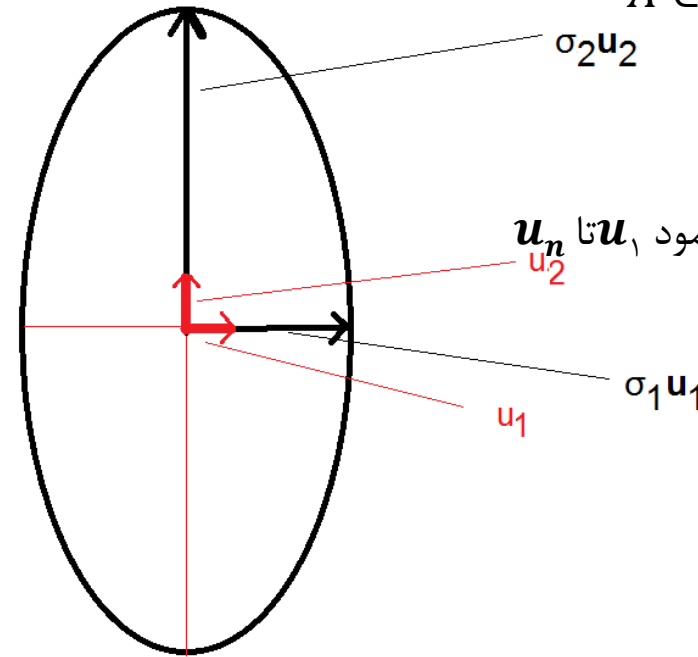
▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



تجزیه مقدار تکین

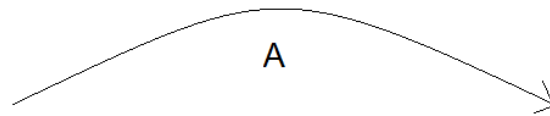
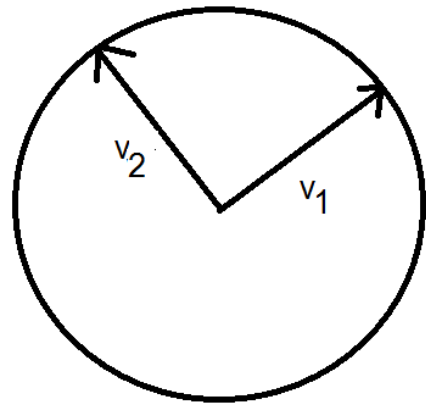


فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2
▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

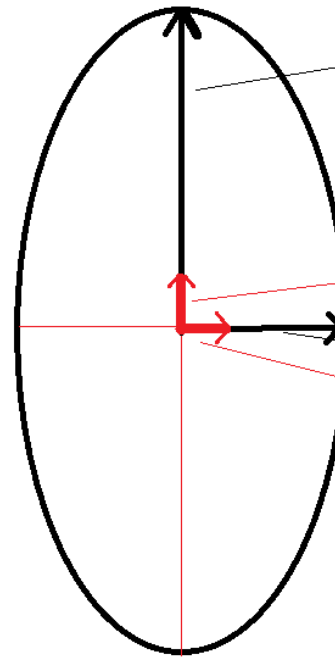


- تعمیم n بعدی
- تبدیل به ابربیضی
- بردارهای نرمال عمود u_1 تا u_n
- ضرایب σ_1 تا σ_n

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2
▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



- $\sigma_2 u_2$
- تعمیم n بعدی
- تبدیل به ابربیضی
- بردارهای نرمال عمود u_1 تا u_n
- یکانی
- ضرائب σ_1 تا σ_n
- مقادیر تکین
- تاثیر آنها؟

تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$

تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$

$$Av_i = \sigma_i u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

- تعمیم n بعدی
- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$
$$Av_i = \sigma_i u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_{m \times n} [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]_{n \times n} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]_{m \times n} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

تجزیه مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

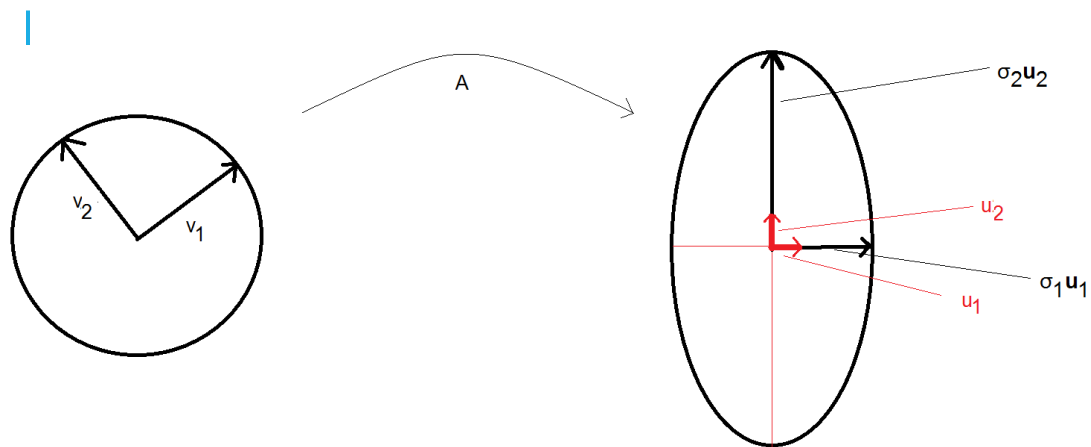
$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$

$$Av_i = \sigma_i u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_{m \times n} [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]_{n \times n} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]_{m \times n} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

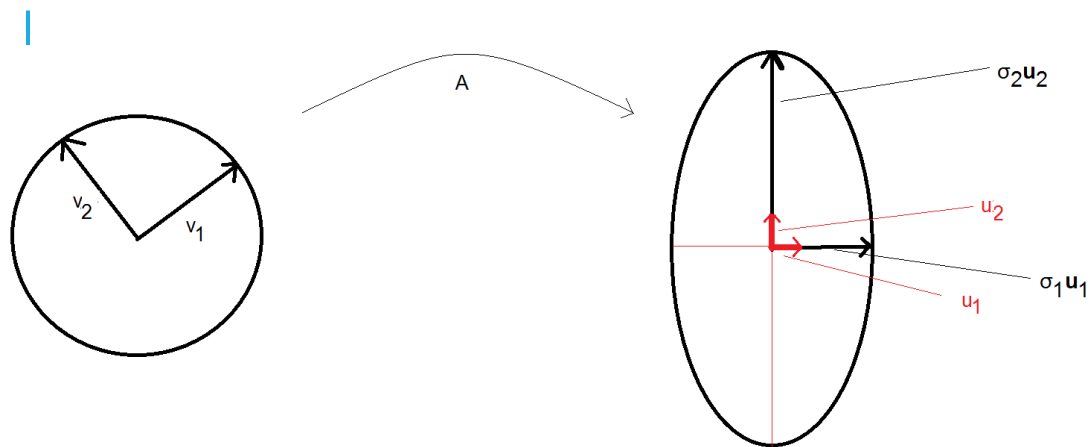
▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$
$$Av_i = \sigma_i u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_{m \times n} [v_1 v_2 \dots v_n]_{n \times n} = [u_1 u_2 \dots u_n]_{m \times n} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

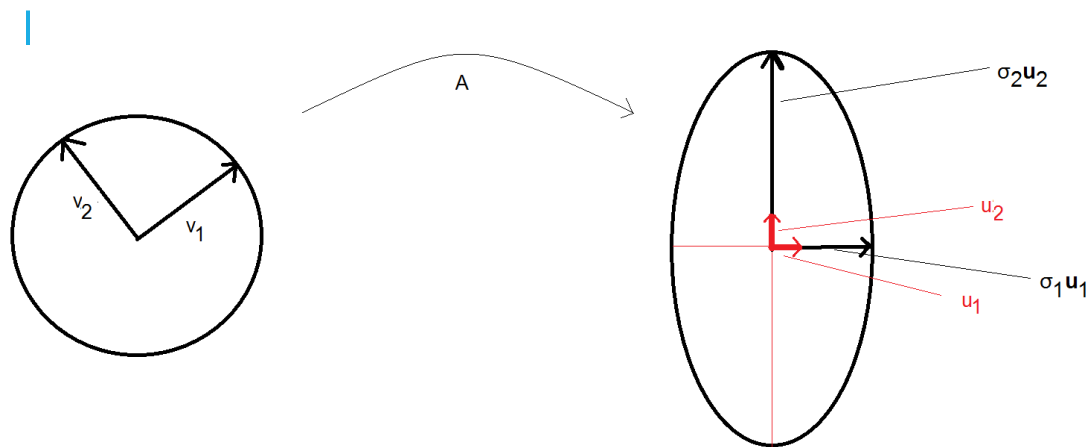
$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

V چرخش

$\hat{\Sigma}$ کشیدن یا فشردن

\hat{U} چرخش

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

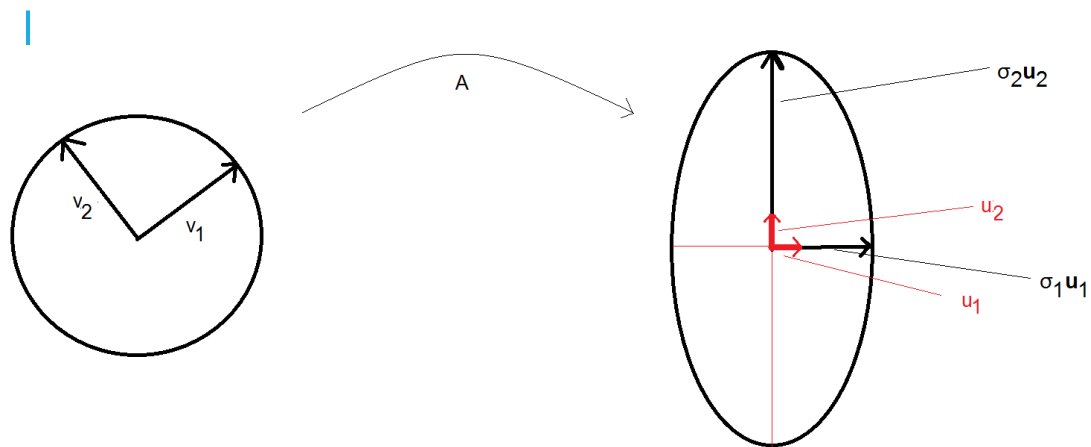
$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

V چرخش (تبدیل یکانی unitary transformation)

$\hat{\Sigma}$ کشیدن یا فشردن

\hat{U} چرخش

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

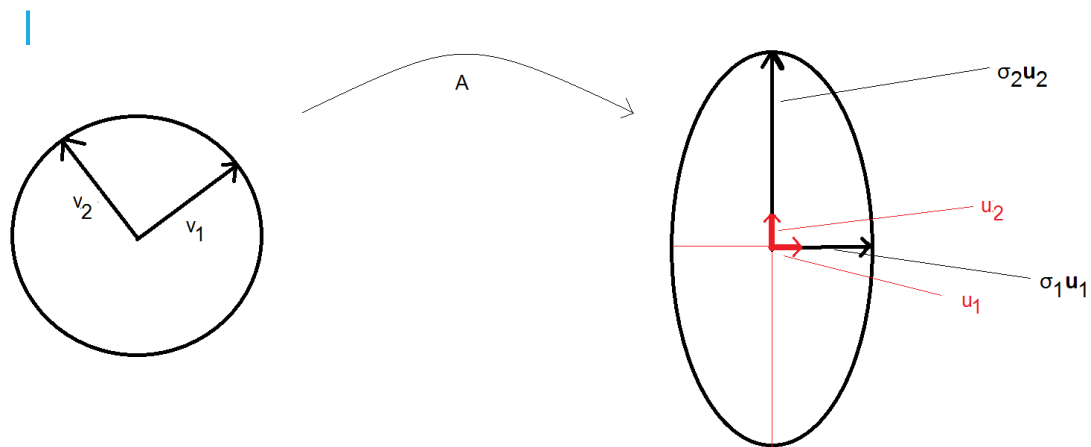
V چرخش (تبدیل یکانی unitary transformation)

$$V^{-1} = V^T \quad \bullet$$

$\hat{\Sigma}$ کشیدن یا فشردن

\hat{U} چرخش

تجزیه مقدار تکین



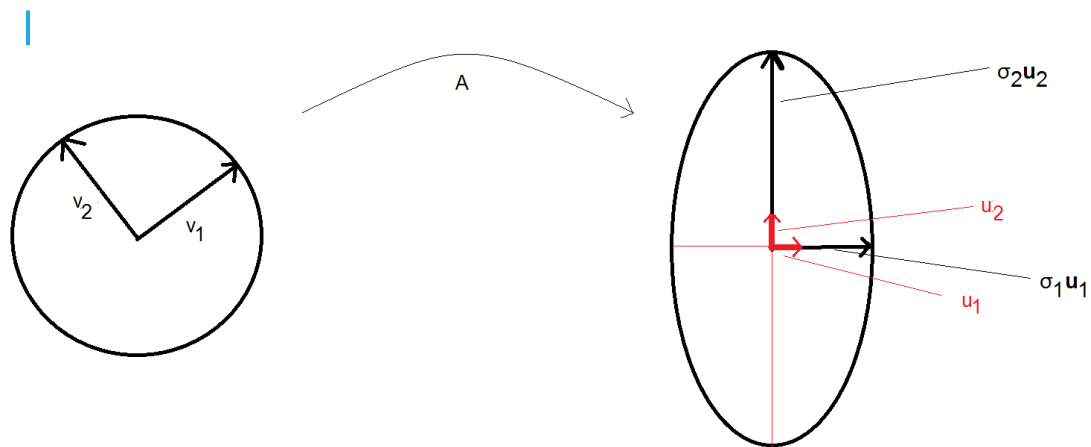
فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_2 و v_1

▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$
$$AVV^{-1} = \hat{U}\hat{\Sigma}V^{-1}$$

تجزیه مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم v_1 و v_2

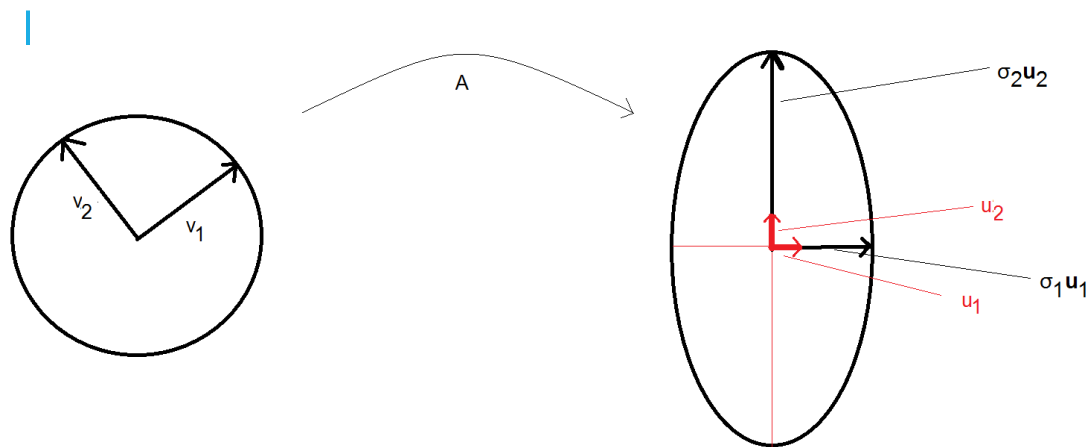
▪ تعمیم n بعدی

▪ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$
$$AVV^{-1} = \hat{U}\hat{\Sigma}V^{-1}$$
$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T$$

تجزیه مقدار تکین کاهیده

تجزیة مقدار تکین



تجزیة مقدار تکین کاهیده
 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$A_{m \times n} = \hat{U}_{m \times n} \hat{\Sigma}_{n \times n} V^T_{n \times n}$$

تجزیه مقدار تکین

تجزیه مقدار تکین کاهیده

$$A_{m \times n} = \hat{U}_{m \times n} \hat{\Sigma}_{n \times n} V^T_{n \times n}$$

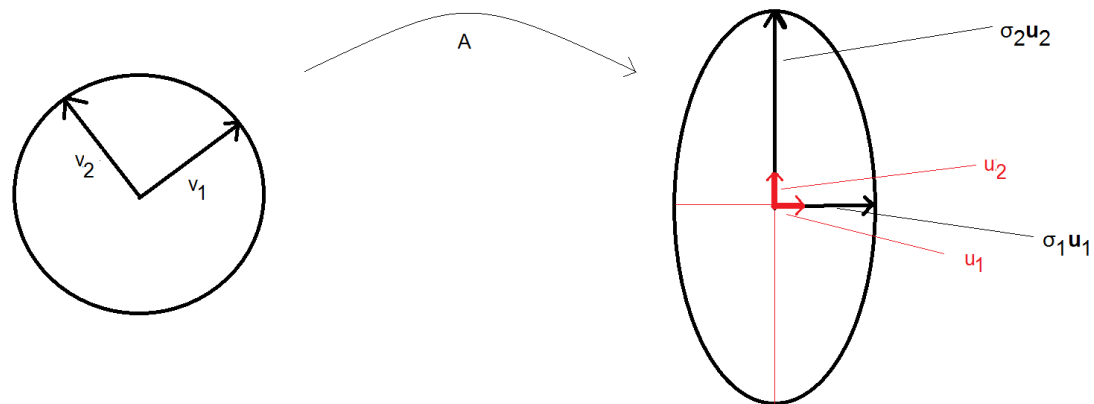
افزودن چند $(m-n)$ بردار نرمال متعامد به \hat{U}

▪ متعاقبا افزودن چند سطر صفر به انتهای $\hat{\Sigma}$

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V^T_{n \times n}$$

تجزیة مقدار تکیں

تجزیة مقدار تکیں



$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V^T_{n \times n}$$

تجزیه مقدار تکین

نمایش بردار دلخواه x با دو بردار پایه v_1 و v_2

$$x = (x \cdot v_1)v_1 + (x \cdot v_2)v_2$$

ضرب هر دو طرف با ماتریس تبدیل M

$$Mx = (x \cdot v_1)Mv_1 + (x \cdot v_2)Mv_2$$

امکان نوشتن Mv_1 با $u_1\sigma_1$

$$Mx = (x \cdot v_1)u_1\sigma_1 + (x \cdot v_2)u_2\sigma_2$$

چون $x \cdot v_1 = x^T v_1 = v_1^T x$

$$Mx = u_1\sigma_1 v_1^T x + u_2\sigma_2 v_2^T x$$

داریم $Ax = Bx \Leftrightarrow A = B$

$$M = u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T$$

نمایش با ماتریس 2×2

$$M = \underbrace{[u_1 \quad u_2]}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}}_{V^T}$$

تجزیه مقدار تکین

قضیه

هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ دارای تجزیه مقدار تکین است

تجزیه مقدار تکین

$$A^T A$$

تجزیه مقدار تکین

$$A^T A = (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T$$

تجزیه مقدار تکین

$$\begin{aligned} A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \end{aligned}$$

تجزیه مقدار تکیین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma I \Sigma V^T\end{aligned}$$

تجزیه مقدار تکین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma I \Sigma V^T \\&= V \Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

تجزیه مقدار تکین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma I \Sigma V^T \\&= V \Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

$$A^T A V$$

تجزیه مقدار تکیین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma I \Sigma V^T \\&= V \Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

$$A^T A V = V \Sigma^2 V^T V$$

تجزیه مقدار تکین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma I \Sigma V^T \\&= V \Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^T A V &= V \Sigma^2 V^T V \\&= V \Sigma^2\end{aligned}$$

تجزیه مقدار تکیں

$$\begin{aligned}A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\&= V \Sigma I \Sigma V^T \\&= V \Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^T A V &= V \Sigma^2 V^T V \\A^T A V &= V \Sigma^2\end{aligned}$$

$$\lambda_i = \sigma_i^2$$

تجزیه مقدار تکین

$$\begin{aligned}A^T A &= (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T \\&= V\Sigma U^T U\Sigma V^T \\&= V\Sigma I \Sigma V^T \\&= V\Sigma^2 V^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^T A V &= V\Sigma^2 V^T V \\&= V\Sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A A^T &= U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T \\&= U\Sigma V^T V \Sigma U^T \\&= U\Sigma I \Sigma U^T \\&= U\Sigma^2 U^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A A^T U &= U\Sigma^2 U^T U \\&= U\Sigma^2\end{aligned}$$

تجزیه مقدار-تکین

قضیه تمّت

ماتریس مربع $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ دارای رتبه $\rho(A) \in [0, \min(m, n)]$ باشد. تمّت A:

$$A = U \Sigma V^T$$

▪ $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ماتریس متعامد واحد (یکانی) با ستون‌های u_i

▪ $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس متعامد واحد (یکانی) با ستون‌های v_i

▪ $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ با $\Sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ و $\Sigma_{ij} = 0$

▪ σ_i مقادیر قطری است که مقدار تکین خوانده می‌شوند

▪ بردار تکین چپ u_i

▪ بردار تکین-راست v_i

▪ قرارداد: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$

تجزیه مقدار-تکین - ادامه

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

▪ نیاز به پرکردن با صفر خاصه $m > n$

تجزیه مقدار-تکین - ادامه

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد--مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد--مثال

الف- محاسبه بردار تکین راست

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد -- مثال

الف- محاسبه بردار تکین راست

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد--مثال

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف- محاسبه بردار تکین راست

▪ پایه ویژه‌های $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = PD P^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد-- مثال

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف- محاسبه بردار تکین راست

▪ پایه ویژه‌های $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P D P^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$V = P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد-مثال - ادامه

ب- محاسبه ماتریس مقدار تکین

▪ σ_i مقادیر ریشه بردارهای $A^T A$

▪ استفاده از D

▪ در این مثال رتبه برابر ۲

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 1 & 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P D P^T \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$V = P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 1 & 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد-مثال - ادامه

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} 0$$

ج- محاسبه بردارهای تکین-چپ

▪ استفاده از تصویر نرمال شده بردارهای تکین-راست ۵

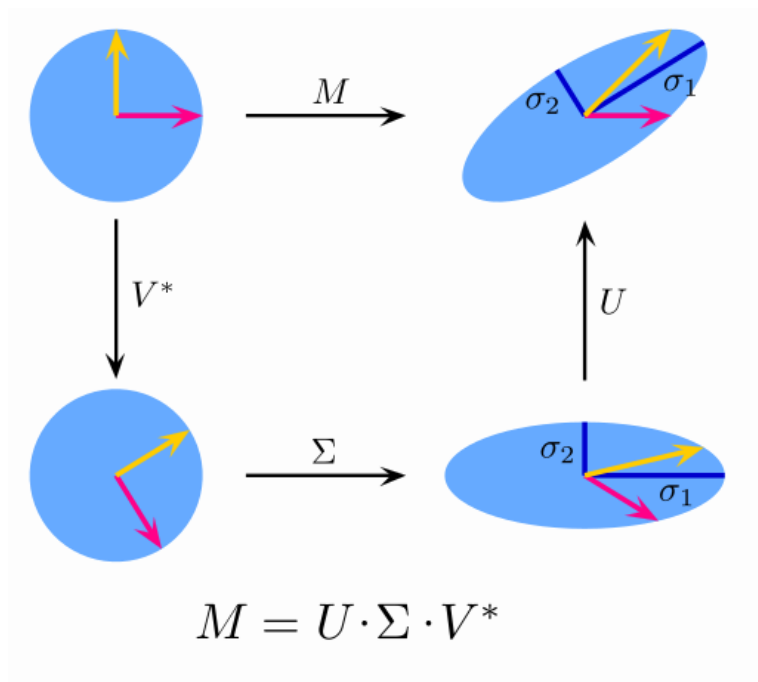
▪ در این مثال رتبه برابر ۲

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} \\ -2 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$[u_1, u_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

«تجزیه مقدار ویژه» رودرروی «تجزیه مقدار تکین»



ویکی

$$A = U \Sigma V^T \text{ و } A = P D P^{-1}$$

- تجزیه مقدار تکین (تمت) برای هر ماتریسی موجود است.
- تجزیه مقدار ویژه (تمو) صرفاً ماتریس مربع و با شرط داشتن پایه بردار ویژه
- P در تمو لزوماً متعامدنرمال نیست
 - نشان‌دهنده چرخش و مقیاس نیست
 - U و V متعامد نرمال
 - نمایشگر چرخش
- هر دو حاصل سه نگاشت خطی
 - الف- تغییر پایه در دامنه
 - ب- مقیاس‌بندی مستقل از هر پایه و نگاشت از دامنه به هم‌دامنه
 - ج- تغییر پایه در هم‌دامنه
- تفاوت اساسی: دامنه و هم‌دامنه در تمت از فضاهای برداری با ابعاد متفاوت
- U و V لزوماً معکوس یکدیگر نیستند

«تجزیه مقدار ویژه» رودرروی «تجزیه مقدار تکین» - ادامه

- تمت مقادیر ماتریس قطری حقیقی و نامنفی
- یکسانی «تمو» و «تمت» ماتریس مربع متقارن

مثال

کاهش داده

تعمیم داده محور تبدیل فوریه

حل دستگاه معادلات خطی

▪ کمینه مربعات رگرسیون خطی

ژن-انسان

فیلم-تماشاگر

آزمایش دارو

تاثیر بر تصمیم مردم

تشخیص تصویر مردم

انواع فاکتورگیری (تجزیه) ماتریس در «جبر خطی»

$M = LU$ حذف

$M = QR$ متعامدسازی

$S = Q\Lambda Q^T$ ماتریس متقارن و ویژه بردار

$M = X\Lambda X^{-1}$ قطری سازی ماتریس مربع

$M = U\Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین هر ماتریسی

منابع

[۱]

[۲]

[۳]

[۴]

[۵]

[۶]

[۷]

[استرنگ] The Four Fundamental Subspaces: 4 Lines, Gilbert Strang

“How to intuitively understand eigenvalue and eigenvector?,” <https://math.stackexchange.com/questions/243533/how-to-intuitively-understand-eigenvalue-and-eigenvector>

“Eigenvalues and eigenvectors,” <https://www.statlect.com/matrix-algebra/eigenvalues-and-eigenvectors>

“What do eigenvalues and eigenvectors represent intuitively? What is their significance?,” <https://www.quora.com/What-do-eigenvalues-and-eigenvectors-represent-intuitively-What-is-their-significance>

“Eigenvalues,” <https://intuitive-math.club/linear-algebra/eigenvalues/>

[Singular Value Decomposition as Simply as Possible](#)